Straßenverkehrsplanung als Thema für den Mathematikunterricht

Hans-Stefan Siller

1. Einleitung

Der Einfluss realitätsbezogener oder anwendungsorientierter Aufgaben auf den Mathematikunterricht, ist und war immer wieder Gegenstand fachdidaktischer Diskurse. Bedeutende Persönlichkeiten haben immer wieder auf die auf die Notwendigkeit realitäts- und anwendungsorientierter Aufgaben hingewiesen. Stellvertretend dafür möchte ich H. Freudenthal und F. Klein mit ihren Plädoyers nennen.

In einem Gedankenexperiment stellt sich Freudenthal Schüler(innen) vor, die ein „Stück Mathematik“ erfinden. Ihr Verhalten zu beobachten, zu analysieren und daraus Schlüsse zu ziehen, wäre für ihn eine reizvolle und verantwortungsvolle Aufgabe der Fachdidaktik. Dabei die Mathematik mit der *„erlebten Wirklichkeit des Lernenden“* zu verknüpfen *„… ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt…“* (Freudenthal, 1973).

Klein stellt auf ähnliche Weise die fachlichen Inhalte in den Mittelpunkt einer lebendigen Mathematik. Für einen lebendigen und anschaulichen Unterricht muss immer wieder auf die Vorstellungen und Erfahrungen der Schüler(innen) zurückgegriffen werden. So heißt es beispielsweise bei Klein (1925, S. 227): „Man wird auf der Schule stets zuerst an die lebhafte konkrete Anschauung anknüpfen müssen und erst allmählich logische Elemente in den Vordergrund bringen können.“

Außermathematische Fragestellungen, insbesondere realitätsbezogene Sachverhalte, können durch Modellierungstätigkeiten in den Unterricht Einzug halten (vgl. Siller, 2009; Siller, 2010). Auch die Einbettung innermathematischer Kontexte kann dadurch gelingen (vgl. Siller, 2008). Dadurch werden nicht nur mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten bei Schüler(inne)n erzeugt, sondern v.a. auch interpretierende und wertende Fähigkeiten im Zusammenspiel mit Mathematik. Schüler(innen) können sich so mit Problemen ihrer Lebenswelt mathematisch auseinandersetzen. Ziele welche man als Lehrer(in) zu verfolgen versuchen sollte, sind:

- Erschließung der konkreten uns umgebenden Welt,
- Erschließung der Mathematik,
- Motivation zu „Neuem“.

Somit wird dem Lehrplan (vgl. BMUKK, 2000) genüge getan und wesentliche Bildungsziele, wie z.B. kritisches Denken, gefördert. Schüler(innen) erlernen somit mathematische Handlungen und / oder Begriffe miteinander zu verknüpfen, mathematisches Wissen in der Lebenswelt zu nutzen, über Zusammenhänge und Begriffsbildungen zu reflektieren, sowie praxisorientiert mit Mathematik im alltäglichen Leben zu arbeiten.

Das Zusammenspiel von Realität und Mathematik kann durch den Einbezug anwendungsorientierter Aufgaben charakterisiert werden. Insbesondere in der Sekundarstufe II soll es ein Ziel des Mathematikunterrichts sein, Schüler(inne)n ein „ausgewogenes“ Bild von Mathematik als kulturelles und gesellschaftliches Gesamtphänomen zu vermitteln (vgl. Fischer & Malle, 1984). Dazu gehören und gehörten in der historischen Entwicklung stets auch Anwendungsbezüge. Das Ziel kann somit nur erreicht werden, wenn Anwendungen auch in den Mathematikunterricht einbezogen werden. Zumindest exemplarisch muss aufgezeigt werden, wo bzw. wie Mathematik anwendbar ist. Schüler(innen) werden so eine realistischere Einschätzung der Rolle von Mathematik erhalten und erhalten wissenschaftstheoretische Einsichten in das Fach.

Z.B. durch die Thematisierung von Aspekten des Straßenbaus im Unterricht kann genau dieses ausgewogene Bild erzeugt werden (vgl. Blum, 1985).

2. Einstieg in das Thema

Um Schüler(innen) auf diese Thematik einzustimmen können verschiedene Zugänge, z.B. Videoausschnitte aus tagesaktuellen (Nachrichten-)Sendungen, Diskussionen zur Lebensqualität an Hauptverkehrsverbindungen oder Zeitungsartikel (vgl. Herget, 1998) verwendet werden. Davon ausgehend können entweder direkt aus den Informationen mögliche Projekte gestartet werden oder man erarbeitet aufgrund dieser Informationen eigene Problemstellungen, welche mehr mathematische Überlegungen zulassen.

Auf Basis einer realen Zeitungsmeldung (vgl. SN, 22.01.2009) kann die nachfolgende Angabe erstellt werden, welche sehr offen formuliert ist, nur Eckdaten bereitstellt und Schüler(innen) in die Rolle eines Verkehrsplaners schlüpfen lässt.

Die Problemstellung könnte wie folgt lauten:

> Die Gemeinden Oberndorf, Lamprechtshausen und Bürmoos planen zur Erhöhung der Lebensqualität ihrer Einwohner die Errichtung einer Umfahrungsstraße. Diese soll die genannten Gemeinden vom Güter- bzw. Autoverkehr zwischen Salzburg und Braunau entlasten. Die Umfahrungsstraße soll auf Wunsch der Gemeinden so gelegt werden, dass sie für motorisierte Straßenverkehrsteilnehmer in optimaler Weise erreicht wird.
>
> Als Vorgaben an diese Umfahrungstrasse existieren folgende einstimmige Beschlüsse: Der Verlauf der existierenden Bundesstraße 156 soll im Streckenabschnitt Weitwörth verlassen werden, und muss bis zum Streckenabschnitt Schwerting wieder erreicht werden.
>
> Zur Umsetzung dieses Projektes wurde von den Gemeinden eine Kommission, bestehend aus Vertretern aller drei Gemeinden eingesetzt. Die Aufgabe der Kommission ist die Ausschreibung und Einholung verschiedener Projektvorschläge, aus denen die Geeignetsten ausgewählt und prämiert werden.
>
> Im Rahmen ihrer Arbeit wendet sich die Kommission an verschiedene Verkehrsplaner, darunter auch an euch. Erarbeitet in Teams (zu je 3 Personen) eine Möglichkeit für eine Umfahrungsstraße.

Der Lehrende muss sich neben der Tätigkeit als fachliche Stütze, vor allem auf die Rolle eines Kommissionsmitglieds zurückziehen. In dieser Rolle darf er Entscheidungen treffen und auch Planungsrichtlinien vorgeben. Die Planungsteams müssen ihre Überlegungen und Berechnungen ausführlich dokumentieren, sodass in einer Abschlusspräsentation die jeweiligen Vorteile ausführlich argumentiert werden können.

3. Erarbeitung des Themas im Unterricht

Der Arbeitsprozess der Schüler(innen) kann in mehrere Abschnitte eingeteilt werden. Der Beginn ist durch eine ausführliche Datenerhebung gekennzeichnet. Im Laufe dieser Tätigkeit werden die Schüler(innen) auf immer mehr Details stoßen, wodurch sich ein erster Modellierungsgedanke herausbilden kann. Lehrer(innen) sollen bereits hier als fachliche Ansprechpartner zur Verfügung stehen, um allenfalls Schüler(innen) auf nicht lösbare Modellvorschläge hinzuweisen – falls dies von den Schüler(inne)n gewünscht wird.

Nachdem genügend Daten gesammelt wurden, kann ein erstes Modell entwickelt und formuliert werden. Dazu ist es sinnvoll in den Gruppen zunächst verschiedene Ansätze zu notieren und diese dann im Klassenverband zu erörtern und zu diskutieren. Anschließend sollen die vorgeschlagenen Modelle auf Berechenbarkeit überprüft werden. Durch diesen Schritt wird deutlich, dass es notwendig ist, einen Kompromiss in der durchführbaren Variante zu finden. Sobald das verwendbare Modell klar umrissen ist, sollen die Schüler(innen) den Ansatz durch verbindliche Vorgaben notieren. Danach kann die notwendige Mathematisierung erfolgen, eine Lösung für das mathematische Modell erarbeitet und die erhaltenen Ergebnisse interpretiert und validiert werden – ganz im Sinne des Modellbildungskreislaufes (vgl. Blum & Leiß, 2005). Auch die (notwendige) Berücksichtigung technologischer Hilfsmittel im Modellierungskreislauf (vgl. Greefrath, Siller & Weitendorf, 2010) kann in diesem Prozess umgesetzt werden.

Eine mögliche Lösung des Ausgangsproblems (siehe Problemstellung) wird nachfolgend dargestellt. Ich möchte jedoch explizit darauf hinweisen, dass es sich nur um eine unter vielen Möglichkeiten handelt. Dem Einsatz technologischer Hilfsmittel wird dabei eine besondere Rolle zuteil, da ohne solche Hilfsmittel in diesem Fall kaum eine Lösung gelingen würde.

i. Die Datenerhebung

Daten lassen sich nach verschiedensten Gesichts- und Schwerpunkten erheben. Die Möglichkeiten zur Sammlung von Daten reichen dabei von der Sammlung geografischer Daten bis hin zu jener der demografischen Daten. Alle diese Daten lassen sich über die Statistik Austria und entsprechende Websites beziehen. Sammelt man geografische Daten wird man im Modell mehr auf die die Lage der zu berücksichtigenden Orte und der möglichen Straßenführung eingehen. Werden zudem demografische Daten in das Modell einbezogen, können auch Pendlerbewegungen berücksichtigt werden.

Geographischen Daten lassen sich (ohne Probleme) auf mehrere Arten organisieren. Neben der Verwendung vorhandener Karten können insbesondere (Online-)Routenplaner oder GIS-Applikationen eingesetzt werden. Jede Anwendung hat andere Vorteile für den/die Benutzer(in), insbesondere im Handling und den verfügbaren Features. Jedenfalls sollte die

Möglichkeit bestehen, die Karte des zu berücksichtigenden Gebiets auszudrucken um darauf entsprechende Planungsüberlegungen vorzunehmen.

Abbildung 1: Einsatz eines Vermessungsfeatures eines Online-Routenplaners zur Bestimmung der Entfernung zwischen den Orten

ii. Erste Annahmen

Durch den Prozess der Datenerhebung zeigt sich bereits ein erster Modellierungsansatz. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit kann ein Realmodell bereits explizit formuliert werden. So kann die Erstellung des mathematischen Modells wesentlich erleichtert werden.

- Die Orte werden durch ihre Ortskerne repräsentiert. Im Koordinatengitter können sie somit als Punkte eingetragen werden.
- Die räumliche Ausdehnung der Orte (bis zu den Ortsgrenzen) kann durch Kreise mit entsprechenden Radien dargestellt werden.
- Beginn der Umfahrung wird wie gefordert Weitwörth sein, das Ende wird sich bei Schwerting befinden.
- Die Streckenführung wird durch einen Streckenzug dargestellt und lässt sich durch einen (frei wählbaren) Punkt P modifizieren.
- Die Zubringerstraßen zu den Orten stehen stets im rechten Winkel auf die Umfahrungsstraße.
- Um Kosten zu sparen soll die Gesamtlänge minimal sein.

Diese Annahmen des Realmodells sind für die hier dargelegte Lösung als fix zu betrachten. Andernfalls würde ein neues Modell entstehen, welches eine andere Lösung nach sich ziehen würde.

iii. Die Berechnung

Um die minimale Gesamtlänge berechnen zu können, müssen die vorliegenden geographischen Daten zunächst in eine mathematische verwendbare Form gebracht werden. Der erste Schritt in der Lösung ist daher das Übertragen der Kartendaten in Koordinaten.

Dazu wird über die Karte ein lokales kartesisches Koordinatensystem gelegt und dafür dessen Ursprung sowie der Skalierungsmaßstab vorteilhaft festgelegt. Die Umrechnung der gemessenen Koordinaten kann einfach mittels einer Tabellenkalkulation erfolgen.

In der vorliegenden (Muster-)Lösung wurde eine digitale Landkarte (vgl. Abbildung 1) verwendet, die Ortskoordinaten können aus dem Grafikprogramm entsprechend der Pixelposition abgelesen werden. Hier lauten sie für Bürmoos (191 | 275), für Lamprechtshausen (377 | 205), für Oberndorf (307 | 617), für Schwerting (421 | 56) und für Weitwörth (449 | 724). Zieht man nun die kleinste bzw. die größte x– bzw. y–Koordinate zur Berechnung heran, kann der Koordinatenursprung beispielsweise als „Zentrum" der aus fünf Punkten bestehenden Punktwolke berechnet werden:

$$x_0 = \frac{191+449}{2} = 320 \text{ bzw. } y_0 = \frac{56+724}{2} = 390$$

Anschließend können die alten Koordinaten auf diesen Koordinatenursprung bezogen und auf die gewünschte Größe skaliert werden. Dies kann bereits in einer Tabellenkalkulation erfolgen.

	A	B	C	D	E	F	G
1		x	y	x neu	y neu	x zweistellig	y zweistellig
2	Bürmoos	191	275	-129	115	-13	12
3	Lamprechtshausen	377	205	57	185	6	19
4	Oberndorf	307	617	-13	-227	-1	-23
5	Schwerting	421	56	101	334	10	33
6	Weitwörth	449	724	129	-334	13	-33

Abbildung 2: Umrechnung der vorhandenen Koordinaten

Nach der Umrechnung der Koordinaten kann eine Simulation wesentlich zur Verbesserung des Verständnisses der Situation beitragen. In diesem Fall bietet sich der Einsatz eines Dynamischen Geometrie Systems an. Zur Erstellung einer solchen Simulation muss von den Schüler(inne)n zunächst noch nichts berechnet werden.

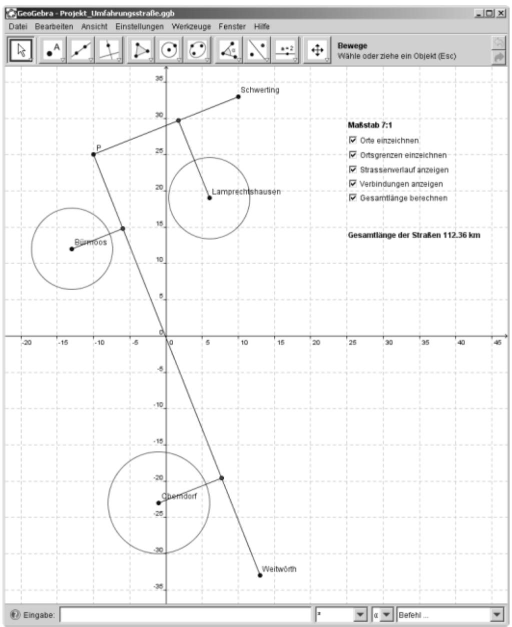

Abbildung 3: Simulation mit einem DGS

Im nächsten Schritt erfolgt eine Berechnung der Lösung. Da sämtliche Straßen hier durch Geraden modelliert werden, müssen lediglich die Gleichungen dieser Geraden erstellt werden. Zudem müssen Schnittpunkten und sämtliche Streckenlängen ermittelt werden. Um die Gesamtlänge der Straßen zu berechnen verwende ich hier die analytische Form der Geradengleichung (y = k·x + d). Die Steigung kann durch die Verwendung der Zweipunktformel ($k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$) bestimmt werden, was wiederum zur Berechnung des Ordinatenabstands führt. Die Geradengleichung durch zwei Punkte kann wie folgt angegeben werden:

$$y = y_1 + (x - x_1)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Die dazugehörige Normalgerade kann ebenfalls leicht bestimmt werden:

$$y = y_1 - (x - x_1)\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

Somit können die notwendigen Gleichungen der jeweiligen Geraden ermittelt werden:

Die Gleichung der Geraden von Weitwörth W(13 | –33) zum Punkt P(p_x | p_y) lautet beispielsweise $y = -33 + (x - 13)\frac{p_y + 33}{p_x - 13}$. Analog kann dies für die Gerade von Schwerting S(10 | 33) zum Punkt P erfolgen.

Die Gleichung der Normalgeraden durch Oberndorf O(–1 | –23), Bürmoos B(–13 | 12) und Lamprechtshausen L(6 | 19) kann ebenfalls analog erfolgen.

Für die Berechnung der Gesamtlänge benötigt man außerdem die Längen der Strecken s_1 sowie s_2 von Weitwörth zum Punkt P sowie von Schwerting zum Punkt P. Diese können noch einfach angegeben werden und lauten:

$$s_1 = \sqrt{(13 - p_x)^2 + \left(-33 - p_y\right)^2}$$

$$s_2 = \sqrt{(10 - p_x)^2 + \left(33 - p_y\right)^2}$$

Die Berechnung der Länge der Verbindungsstrecken ist nicht mehr so einfach durchzuführen. Dies kann durch die Verwendung des CAS erfolgen. Man erhält die folgenden Längen:

$$s_O = 2 \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot p_x^2 + 70 \cdot p_x \cdot p_y + 1660 \cdot p_x + 49 \cdot p_y^2 + 2324 \cdot p_y + 27556}{p_x^2 - 26 \cdot p_x + p_y^2 + 66 \cdot p_y + 1258}}$$

$$s_B = \sqrt{\frac{2025 \cdot p_x^2 + 2340 \cdot p_x \cdot p_y + 24570 \cdot p_x + 676 \cdot p_y^2 + 14196 \cdot p_y + 74529}{p_x^2 - 26 \cdot p_x + p_y^2 + 66 \cdot p_y + 1258}}$$

$$s_L = 2 \cdot \sqrt{\frac{49 \cdot p_x^{\;2} - 28 \cdot p_x \cdot p_y - 56 \cdot p_x + 4 \cdot p_y^{\;2} + 16 \cdot p_y + 16}{p_x^{\;2} - 20 \cdot p_x + p_y^{\;2} - 66 \cdot p_y + 1189}}$$

Um die Kosten für den Umfahrungsstraßenbau so gering wie möglich zu halten, soll die Gesamtlänge, d.h. die Summe aller angegebenen Teillängen, minimal werden. Wie man aber anhand der einzelnen Teillängen s_1, s_2, s_O, s_B bzw. s_L unschwer erkennen kann, handelt es sich bei dieser Gleichung $s = s_1 + s_2 + s_O + s_B + s_L$ um eine Gleichung in den beiden Unbekannten p_x und p_y. Die Behandlung der Lösung einer solchen Gleichung ist im Lehrplan (vgl. BMUKK, 2004) nicht vorgesehen, kann aber mittels einer Tabellenkalkulation experimentell ermittelt werden.

	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
30	121,8	121	121	120	120	119	119	118	118	118	117	117	116	116	116	115	115	114	114	113	112	111	109	107	103	107	113	117	120	122	125
29	120,4	120	119	119	118	118	117	117	117	116	116	115	115	114	114	113	113	112	112	111	110	109	107	105	103	107	112	115	119	121	124
28	119,0	118	118	117	117	116	116	116	115	115	114	114	113	113	112	112	111	111	110	109	108	107	105	103	104	107	111	114	117	120	123
27	117,6	117	117	116	116	115	115	114	114	113	113	112	112	111	111	110	110	109	108	108	107	105	104	102	104	107	111	114	117	119	122
26	116,2	116	115	115	114	114	113	113	112	112	111	111	111	110	110	109	108	108	107	106	105	104	103	102	104	107	110	113	116	118	121
25	114,9	114	114	113	113	112	112	111	111	111	110	110	109	109	108	108	107	106	106	105	104	103	102	102	105	107	110	113	115	118	120
24	113,5	113	112	112	112	111	111	110	110	109	109	108	108	107	107	106	106	105	105	104	103	102	101	102	105	107	110	112	115	117	120
23	112,2	112	111	111	110	110	109	109	108	108	108	107	107	106	106	105	105	104	104	103	102	102	101	103	105	107	109	112	114	117	119
22	110,9	110	110	109	109	108	108	108	107	107	106	106	105	105	105	104	104	103	103	102	101	101	101	103	105	107	109	112	114	116	119
21	109,6	109	109	108	108	107	107	106	106	106	105	105	104	104	103	103	103	102	102	101	101	100	101	103	105	107	109	111	114	116	118
20	108,4	108	107	107	106	106	106	105	105	104	104	104	103	103	102	102	102	101	101	101	100	99,8	101	103	105	107	109	111	113	116	118
19	107,1	107	106	106	105	105	104	104	104	103	103	103	102	102	101	101	101	100	100	99,9	99,6	99,3	101	103	105	107	109	111	113	115	117
18	105,9	105	105	104	104	104	103	103	102	102	102	101	101	101	101	100	100	99,7	99,5	99,3	99,1	99,4	101	103	105	107	109	111	113	115	117
17	104,7	104	104	103	103	102	102	102	101	101	101	100	100	99,9	99,7	99,4	99,2	99	98,8	98,7	98,6	99,5	101	103	105	107	109	111	113	115	117
16	103,4	103	103	102	102	101	101	101	100	100	99,7	99,5	99,2	99	98,8	98,6	98,5	98,3	98,2	98,1	98,1	99,5	101	103	105	107	109	111	113	115	117
15	102,7	102	101	101	101	100	99,8	99,5	99,2	99	98,7	98,5	98,3	98,1	98	97,9	97,8	97,7	97,6	97,6	97,9	99,5	101	103	105	107	109	110	112	115	117
14	102,4	101	100	99,8	99,4	99,1	98,7	98,5	98,2	98	97,8	97,6	97,4	97,3	97,2	97,1	97,1	97	97,1	97,1	97,8	99,4	101	103	105	107	108	110	112	114	116
13	102,2	100	99	98,6	98,3	98	97,7	97,4	97,2	97	96,8	96,7	96,5	96,5	96,4	96,4	96,4	96,4	96,5	96,6	97,8	99,4	101	103	105	106	108	110	112	114	116
12	102,1	100	97,9	97,5	97,2	96,9	96,6	96,4	96,2	96	95,9	95,8	95,7	95,6	95,6	95,7	95,7	95,8	96	96,2	97,7	99,3	101	103	105	106	108	110	112	114	116
11	102,0	99,9	97,8	96,4	96,1	95,8	95,6	95,4	95,2	95	94,9	94,9	94,8	94,9	94,9	95	95,1	95,3	95,5	96,1	97,6	99,2	101	103	104	106	108	110	112	114	116
10	101,9	99,8	97,7	95,6	95	94,7	94,5	94,3	94,2	94,1	94	94	94	94,1	94,2	94,3	94,5	94,7	94,9	95,9	97,5	99,1	101	103	104	106	108	110	112	114	116

Abbildung 4

In den grauschattierten Bereichen der Tabellenkalkulation ist keine zulässige Lösung möglich, da dort die Bedingungen des Modells verletzt werden. Lediglich in den weißhinterlegten Feldern ist eine mögliche Lösung für P verborgen. Das Minimum für das vorliegende Modell findet man im Punkt P (–6 | 15). Durch entsprechende Simulation des Modells im DGS kann dies bestätigt werden.

Selbstverständlich ist die hier vorliegende Lösung kritisch zu hinterfragen, da sie keinerlei Rücksicht auf irgendwelche Umgebungseinflüsse nimmt. Ob die Wahl des Punktes P tatsächlich so erfolgen kann, muss mittels des verwendeten Kartenmaterials bestimmt werden. In diesem Fall wäre es möglich, obwohl zu hinterfragen ist, ob der Punkt P beispielsweise nicht trotzdem in einer landschaftlich sensiblen Zone liegen würde oder andere Faktoren die Wahl des Punktes P beeinflussen würden. Dies ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Aufgabe, daher kann die experimentell gefundene Lösung als geeignet interpretiert werden. Trotz der (hier) gelungenen Modellierung sollten Schüler(innen) sich auftretende Schwierigkeiten bewusst machen. Für das vorliegende Modell möchte ich einige auflisten:

- P kann nicht an jede Stelle „gesetzt“ werden - als Ursache dafür kann man die Einführung der Ortsgrenzen und die Normalitätsbedingung der Ortszufahrten identifizieren.
- Einsatz des CAS für die Zielfunktion - diese ist sehr komplex und kann eine Lösung kann nur dann erfolgen, wenn man von Anfang an die richtige Definition der einzelnen Funktionen beachtet wird.

- Arbeit mittels Vektoren ist schwierig – die Eingabe und die Umsetzung ist (Tipp-)fehleranfällig.
- Zweidimensionale Zielfunktion - der Versuch eine solche mit analytischen Mitteln zu lösen scheitert trotz Verwendung schulüblicher CAS. Alternativ bleibt nur die Lösung durch eine grafische Methode, welche auf dem Koordinatengitter basiert.

Sensibilisiert man Schüler(innen) in diese Richtung, werden sie in der Reflexionsphase wesentlich kritischer ihre erstellten Modelle betrachten, allenfalls weitere Modellverbesserungen vornehmen.

iv. Mögliche Verbesserungen

Wie bereits erkennbar wurde, ist die mathematische Behandlung, dieses einfachen Modells bereits sehr komplex. Daher dürfte die Suche nach möglichen Modellverbesserungen Schüler(inne)n Schwierigkeiten bereiten. Wenn man sich im Unterrichtsprozess jedoch darauf einigt lediglich mögliche Verbesserungen aufzuzeigen, so werden sicherlich rasch Ideen für eine Modellverbesserung seitens der Schüler(innen) präsentiert werden. Modellverbesserungen welche sofort - aufgrund der Einfachheit des gewählten Modells – geäußert werden können sind die zwei, welche aus geometrischen Gründen Schüler(inne)n rasch einfallen:

- Die Darstellung der Zufahrtsstraßen zu den Orten wird nicht mehr durch Normalgeraden erfolgen.
- Der Streckenverlauf der Umfahrungsstraße wird nicht mehr von einem Punkt bestimmt, sondern von mindestens zwei Punkten.

Neben weiteren geographischen Aspekten (z.B. Berücksichtigung der Höhe oder von Landschaftsschutzzonen) können auch demografische Einflussfaktoren im Modell berücksichtigt werden:

- Die zu optimierende Funktion wird um weitere Faktoren, wie z.B. die Anzahl der Pendler pro Gemeinde erweitert.

Aber auch mathematische Verbesserungen am Modell selbst können u.U. zu einer besseren Lösung führen. Man muss jedoch immer wieder zu bedenken geben, dass die dazu notwendige Mathematik nicht mehr schulrelevant ist:

- Die Streckenführung wird nicht mehr mit Geraden sondern mit Splines durchgeführt.
- Das Gelände wird durch ein Gitter mit geografischen Höhendaten angenähert. Auf dieses Gitter wird anschließend der Shortest Path Tree (vgl. Dijkstra, 1959) angewendet – d.h. der Gitteralgorithmus verwendet.

Anhand dieser wenigen Punkte wird bereits deutlich, dass es noch eine Vielzahl an Modellverbesserungen gibt. Diese sind allerdings nicht mehr für eine Thematisierung in der Schule geeignet, da die Komplexität des Sachverhalts für Schüler(innen) mit deren mathematischen Wissen und Können vereinbar sein muss.

4. Schlussbemerkung

Solche realitätsbezogenen Beispiele, wie hier vorgestellt, sind m.E. durchaus geeignet, um das Modellieren und die Tätigkeit des Modellbildens Schüler(inne)n interessant zu präsentieren und schmackhaft zu machen. Dies bestätigen auch die Auswertungen von Schülerumfragen im Rahmen von Modellierungstagen (vgl. Siller, 2009; Siller, 2010). Viele der Schüler(innen), welche an solchen Projekttagen teilgenommen haben, konnten eine (völlig) neue Facette der Mathematik entdecken und kennenlernen. Die Motivation für das Unterrichtsfach Mathematik konnte dadurch nachhaltig gesteigert werden.

Wer sich für die Thematik des Straßenbaus bzw. der Verkehrsplanung im Unterricht interessiert, der findet sicherlich auch in der Publikationen von Böer (2008) oder der Diplomarbeit von Stadler (2009) aber auch in den ISTRON- und MUED-Materialien eine Vielzahl an interessanten Vorschlägen, um die man die vorgeschlagene Thematik ergänzen könnte.

Literatur

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte 32, H. 2*, 195–232.

Blum, W.; Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren, Heft 128*, 18–21.

BMUKK (2004). *Mathematik Lehrplan AHS-Oberstufe*. Wien. Verfügbar unter: http://www.bmukk.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_ahs_oberstufe.xml [31.08.2010]

Böer, H. (2008). Anwendung und Modellbildung: Autobahn“spar“kreuze. *Praxis der Mathematik, 50. Jahrgang*, 31–34.

Dijkstra, E. W. (1959). A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik, 1*, 269–271.

Fischer, R.; Malle, G. (1984). *Mensch und Mathematik*, Bibliographisches Institut: Wien.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe – Band 1*. Klett: Stuttgart.

Greefrath, G.; Siller, H.-St. & Weitendorf, J. (2010). Modelling considering the influence of technology. Kaiser, G.; Blum, W.; Borromeo Ferri, R. & Stillman, G. (Hrsg.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling– Proceedings of ICTMA 14*, Horwood Publishing Ltd: Chichester.

Herget, W.; Scholz, D. (1998). Die etwas andere Aufgabe. Mathematik-Aufgaben Sek I – aus der Zeitung. Kallmeyer: Seelze.

Klein, F. (1925). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Band I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. 3. Auflage, Springer: Berlin.

SN – Salzburger Nachrichten (2009). *65,5 Millionen Euro für den Straßenbau*. Salzburg. Verfügbar unter: http://www.salzburg.com/online/interaktiv/audio/65-5-Millionen-Euro-fuer-den-Strassenbau.html?article=eGMmOI8VfZf6FhQabk9i3kKoLhiSpzsps2QbRyK&img=&text=&mode=& [31.08.2010]

Siller, H.-St. (2008). *Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik*. Shaker : Aachen.

Siller, H.-St. (2009). Modellierungstage mit dem Thema Sportwetten. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker: Hildesheim.

Siller, H.-St. (2010). Modellierungstage – oder: Wie kann Mathematik (wieder) Spaß machen?, *News & Science, Nr. 25*, 30–32.

Stadler, G. (2009). *Trassierung von Straßen im Mathematikunterricht*. Diplomarbeit, Institut für Didaktik der Mathematik der Johannes Kepler Universität Linz.